МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
„ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ”

Лабораторна робота №10

з курсу «Чисельні методи»

Тема: «**Однокрокові методи розв’язання задачі Коші для звичайних диференційних рівнянь**»

Виконала:
студентка ІІ курсу
групи ДА-41
Степаніщева В.С.

Київ – 2016

Мета роботи: придбання практичних навичок в чисельному інтегруванні звичайних диференційних рівнянь явними і неявними методами Рунге-Кутта, дослідження впливу значення кроку обчислень на точність і збіжність рішення. Визначення можливості застосування засобів стандартних пакетів для отримання результатів.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Запрограмувати на мові пакету Mathematica рішення заданого диференційного рівняння явним методом Рунне - Кутта четвертого порядку (10.6) і виконати рішення при кількох значеннях кроку, поки рішення не почне розбігатися. Спробуйте з'ясувати, чи існує аналітичне рішення задачі.
2. Порівняти отриманий максимально можливий крок hmax з значеннями, обчисленим за допомогою формули (10.17)..
3. Запрограмувати на мові пакету Mathematica рішення заданого диференційного рівняння неявним методом Рунне - Кутта 4(5) і виконати рішення при максимальних значеннях кроку з пункту 1.
4. Запрограмувати на мові пакету Mathematica рішення заданого диференційного рівняння вкладеним явним методом Рунне - Кутта четвертого порядку (10.8) і виконати рішення при максимально можливому кроці hmax ,знайденому в пункті 2.
5. Користуючись стандартними операторами пакету Mathematica, знайти рішення заданого диференційного рівняння вкладеним явним методом Рунне - Кутта і порівняти покрокові похибки рішень, отриманих в пунктах 1, 3 і 5.
6. Користуючись стандартними операторами пакету Mathematica, знайти рішення заданого диференційного рівняння неявним методом Рунне - Кутта Побудуйте відповідні графіки у часі.
7. Скласти звіт з отриманих результатів і математичних формул використаних методів по кожному пункту завдання , давши оцінку порівняльної точності отриманих рішень різними методами.

Варіант 24

$y'=f(t, y)$	t_0	t_k	y_0
$y^2 \ln(t)/t$	1	3	1

Хід роботи

1. Запрограмуємо метод Рунге-Кутта в Mathematica. Введемо межі відрізку інтегрування t, початкові умови y_0, кількість кроків m, довжину кроку h та масив U для зберігання результату розрахунків.

```
f[t_, y_] := y^2*Log[t]/t;
k1[h_] := f[t, y];
k2[h_] := f[t + 0.5*h, y + 0.5*h*k1[h]];
k3[h_] := f[t + 0.5*h, y + 0.5*h*k2[h]];
k4[h_] := f[t + h, y + h*k3[h]];
t0 = 1;
tm = 3;
y0 = 1;
m = 10;
h = (tm - t0)/m;
U = Array[u, {2, m + 1}, {0, 0}];
u[0, 0] = t0;
u[1, 0] = y0;
t = t0; y = y0;
Do[dy = h*(k1[h] + 2*k2[h] + 2*k3[h] + k4[h])/6;
  t = t + h; y = y + dy; u[0, i] = t; u[1, i] = y, {i, 1, m}];
```

Виведемо результати:

```
TableForm[Table[{u[0, i], u[1, i]}, {i, 1, 10}],
 TableHeadings -> {Automatic, {"t", "y"}}]
```

TableForm=

	t	y
1	$\frac{6}{5}$	1.0169
2	$\frac{7}{5}$	1.06
3	$\frac{8}{5}$	1.12416
4	$\frac{9}{5}$	1.20881
5	2	1.31617
6	$\frac{11}{5}$	1.45101
7	$\frac{12}{5}$	1.62131
8	$\frac{13}{5}$	1.83991
9	$\frac{14}{5}$	2.12788
10	3	2.52184

2. Обчислимо максимально можливий крок

```
f[t_, y_] = y^2*Log[t]/t;
f1[t_, y_] = D[f[t, y], y]
2 y Log[t]
----------
    t

FindMaximum[{f1[t, y], 1 ≤ t ≤ 3}, {{t, 1}, {y, 1}}]
{32.4751, {t → 2.71828, y → 44.1382}}

h = 2.7853/32.4751
0.0857672
```

Повторимо обчислення, але уже з h = 0.085.

```
f[t_, y_] := y^2*Log[t]/t;
k1[h_] := f[t, y];
k2[h_] := f[t + 0.5*h, y + 0.5*h*k1[h]];
k3[h_] := f[t + 0.5*h, y + 0.5*h*k2[h]];
k4[h_] := f[t + h, y + h*k3[h]];
t0 = 1;
tm = 3;
y0 = 1;
m = 23;
h = 0.085;
U = Array[u, {2, m + 1}, {0, 0}];
u[0, 0] = t0;
u[1, 0] = y0;
t = t0; y = y0;
Do[dy = h*(k1[h] + 2*k2[h] + 2*k3[h] + k4[h])/6;
  t = t + h; y = y + dy; u[0, i] = t; u[1, i] = y, {i, 1, m}];
TableForm[Table[{u[0, i], u[1, i]}, {i, 1, 10}],
 TableHeadings → {Automatic, {"t", "y"}}]
```

ibleForm=

	t	y
1	1.085	1.00334
2	1.17	1.01248
3	1.255	1.02648
4	1.34	1.04474
5	1.425	1.06692
6	1.51	1.0928
7	1.595	1.12232
8	1.68	1.1555
9	1.765	1.19246
10	1.85	1.23339

Значення сильно відрізняються від попередніх. Можна побачити відмінність між отриманими з різним кроком розв’язками для однакових значень t вже в третьому знаку після коми.

3. Виконатиємо рішення при максимальних значеннях кроку з пункту 1.

```
f[t_, u_] := u^2*Log[t]/t;
h = 0.085;
m = 10;
U = Array[u, m+1];
T = Array[t, m+1];
t[0] = 1; t[m] = 3;
u[0] = 1;
Do [{t[n] = t[0] + h*n;
   k1 := f[u[n+1], t[n+1]];
   k2 := f[t[n+1] - h/2, u[n+1] - (1/2)*h*k1];
   k3 := f[t[n+1] - h/2, u[n+1] - (1/2)*h*k2];
   k4 := f[t[n+1], u[n+1] - h*k3];
   u[n+1] = u[n] + h/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)}, {n, 0, m}];
Do [Print["n=", n, " t[", n, "]=", t[n], " u[", n, "]=", u[n]], {n, 0, m}];
n=0 t[0]=1. u[0]=1
n=1 t[1]=1.085 u[1]=1.
n=2 t[2]=1.17 u[2]=1.00639
n=3 t[3]=1.255 u[3]=1.01794
n=4 t[4]=1.34 u[4]=1.03388
n=5 t[5]=1.425 u[5]=1.05373
n=6 t[6]=1.51 u[6]=1.07719
n=7 t[7]=1.595 u[7]=1.1041
n=8 t[8]=1.68 u[8]=1.13443
n=9 t[9]=1.765 u[9]=1.16821
n=10 t[10]=1.85 u[10]=1.20555
```

4. Розв’яжемо рівняння вкладеним явним методом Рунне – Кутта четвертого порядку і виконаємо рішення при максимально можливому кроці hmax, знайденому в пункті 2.

Для підвищення обчислювальної ефективності чисельного інтегрування диференціальних рівнянь і контролю покрокової похибки були розроблені методи, названі вкладеними методами Рунге–Кутта. Основна ідея полягає у виконанні кроку від точки t_n до t_{n+1} двома методами порядку точності p і $p + 1$, для того щоб отримати оцінку похибки інтегрування методом порядку p.

Найбільш розповсюдженим на сьогодні методом Фельберга є метод, який поєднує методи Рунге–Кутта четвертого і п’ятого порядків і має похибку апроксимації порядку τ^4 іτ^5 відповідно.

```
f[t_, y_] := y^2*Log[t]/t;
k2[tau_] := f[t+0.25*tau, y+0.25*tau*k1[tau]];
k3[tau_] := f[t+3/8*tau, y+3/32*tau*k1[tau]+9/32*tau*k2[tau]];
k4[tau_] :=
  f[t+12/13*tau,
   y+tau*(1932/2197*k1[tau]+7200/2197*k2[tau]+7296/2197*k3[tau])];
k5[tau_] :=
  f[t+tau,
   y+tau (439/216*k1[tau]-8*k2[tau]+3680/518*k3[tau]-845/4104*k4[tau])];
k6[tau_] :=
  f[t+0.5*tau,
   y+
    tau ((-8/27)*k1[tau]-2*k2[tau]-3544/2565*k3[tau]+1859/4104*k4[tau]-
       11/40*k5[tau])];
m = 10; t0 = 1; y0 = 1; tm = 3; tau = 0.085;
U = Array[u, {m+1, 2}, 0]; u[0, 0] = N[t0]; u[0, 1] = y0;
Ep = Array[ep, {m+1, 2}, 0];
ep[0, 0] = t0; ep[0, 1] = 0;
j = 0; t = t0; y = y0;
Do[
  dy1 =
   N[tau*(16/135*k1[tau]+6656/12825*k3[tau]+28561/56430*k4[tau]-
       9/50*k5[tau]+2/55*k6[tau])];
  dy = N[tau*(25/216*k1[tau]+1408/2565*k3[tau]+2197/4104*k4[tau]-1/5*k5[tau])];
  ep[i, 1] = dy-dy1; y = y+dy; u[i, 1] = y; t = N[t+tau];
  ep[i, 0] = t; et[i, 0] = t; u[i, 0] = t, {i, 1, m}];
W = Abs[N[Table[{u[i, 0], u[i, 1], ep[i, 1]}, {i, 0, 10}], 4]];

TableForm[W, TableHeadings → {Automatic, {"t", "um", "epp"}}]
```

	t	um	epp
1	1.	1.000	0
2	1.085	1.00341	5.79164×10^{-6}
3	1.17	1.01319	0.0000549135
4	1.255	1.02868	0.000129759
5	1.34	1.0495	0.000219506
6	1.425	1.07549	0.00032033
7	1.51	1.10669	0.000431974
8	1.595	1.1433	0.000556286
9	1.68	1.18571	0.000696684
10	1.765	1.23452	0.000858112
11	1.85	1.29053	0.00104736

5. Користуючись стандартними операторами пакету Mathematica, знайдемо рішення заданого диференційного рівняння вкладеним явним методом Рунне – Кутта.

```
sol = NDSolve[{y'[t] == y[t]^2*Log[t]/t, y[1] == 1}, y, {t, 1, 3},
  Method -> "ExplicitRungeKutta"]
```

```
{{y -> InterpolatingFunction[ Domain: {{1., 3.}} Output: scalar ]}}
```

```
y[t_] = y[t] /. sol
```

```
{InterpolatingFunction[ Domain: {{1., 3.}} Output: scalar ][t]}
```

```
tau = 0.085;
Y = TableForm[Table[{1 + i*tau, y[1 + i*tau][[1]]}, {i, 1, 15}],
  TableHeadings -> {Automatic, {"t", "y1"}}]
```

	t	y1
1	1.085	1.00334
2	1.17	1.01248
3	1.255	1.02648
4	1.34	1.04474
5	1.425	1.06691
6	1.51	1.09279
7	1.595	1.12232
8	1.68	1.1555
9	1.765	1.19246
10	1.85	1.23339
11	1.935	1.27855
12	2.02	1.32833
13	2.105	1.38312
14	2.19	1.44352
15	2.275	1.51017

З отриманих результатів можна зробити висновки, що розв’язки, отримані явним методом Рунге-Кутта відрізняються від точного розв’язку на деяких ітераціях лише на 10^{-5}.

6. Користуючись стандартними операторами пакету Mathematica, знайти рішення заданого диференційного рівняння неявним методом Рунне - Кутта Побудуйте відповідні графіки у часі.

```
sol = NDSolve[{y'[t] == y[t]^2 * Log[t] / t, y[1] == 1}, y, {t, 1, 3},
  Method -> "ImplicitRungeKutta"]

{{y -> InterpolatingFunction[ Domain: {{1., 3.}} Output: scalar ]}}

y[t_] = y[t] /. sol

{InterpolatingFunction[ Domain: {{1., 3.}} Output: scalar ][t]}

tau = 0.085;
Y = TableForm[Table[{1 + i * tau, y[1 + i * tau][[1]]}, {i, 1, 15}],
  TableHeadings -> {Automatic, {"t", "y1"}}]
```

	t	y1
1	1.085	1.00334
2	1.17	1.01248
3	1.255	1.02648
4	1.34	1.04474
5	1.425	1.06692
6	1.51	1.0928
7	1.595	1.12232
8	1.68	1.1555
9	1.765	1.19246
10	1.85	1.23339
11	1.935	1.27856
12	2.02	1.32832
13	2.105	1.38313
14	2.19	1.44352
15	2.275	1.51017

На деяких ітераціях останній розв’язок відрізняється від отриманих раніше приблизно на 10^{-5}.

Висновок

Однокрокові методи Рунге-Кутта будують на основі скороченого ряду Тейлора. Кількість членів цього ряду *p*

визначає порядок методу, а перший неврахований член ряду – локальну похибку обчислень $O(h^{p+1})$. Порядок методу p визначає залежність похибки від кроку обчислень. Чим вище порядок методу, тим точніше розв’язок, але й вище порядок обчислень.

Недоліком явних методів Рунге-Кутта є те, що існує обмеження для максимального кроку обчислень, перевищення цього максимального кроку призводить до розбіжності розв’язку. Це робить явні методи непридатними для розв’язання жорстких задач. В таких випадках використовуються неявні методи.